

# GRAFO-ANALITIKUS OPTIMÁLÁS 3D-BEN

## GRAPHO-ANALYTICAL OPTIMIZATION IN 3D

Szabó Ferenc János\*

### ABSTRACT

*The grapho-analytical optimization technique is based on the Kuhn-Tucker optimality criterium and it is applied for the solution of a three-dimensional optimization problem. The graphic part of the solution shows in three dimension the structure of the problem, while the analytical side of the solution gives the possibility of high accuracy of the optimum result. The optimization method is applied for the numerical example of a I beam subjected to bending and tension.*

### KIVONAT

*A cikkben bemutatott grafo-analitikus optimumkeresési módszer a Kuhn-Tucker optimalitási kritériumra alapul és a módszert egy háromváltozós optimumkeresési probléma megoldására alkalmazzuk. A megoldás grafikus részében háromdimenziós ábrák mutatják a probléma szerkezetét, míg az analitikus részben az optimális megoldás pontossága a kiemelendő eredmény. Számpéldaként egy hajlított-húzott I tartó tömeg-minimumra történő optimalálásának példáját mutatjuk be.*

### 1. BEVEZETÉS

Napjainkban igen fontos tendencia a különféle elemek, szerkezetek saját tömegének csökkentése, mely az autóiparban, repülőgép-gyártásban nagyon fontos cél. Gyakran a tömegcsökkentés többváltozós optimumszámítást igényel, ami sokszor idő- és számítás-igényes eljárás. Ebben a cikkben egy nagyon egyszerű, de mégis nagyon hasznosnak bizonyuló optimumkereső eljárást mutatok be, a grafo-analitikus optimalást, amely a Kuhn-Tucker optimalitási kritériumra épül. A rajzos (grapho) és az egyenletrendezéssel történő (analitikus) megoldási mód mindig segíti egymást, ami könnyebbé, gyorsabbá, jobban áttekinthetővé teszi az optimumkeresési probléma szerkezetét. A kétváltozós eseteket (2D optimum) nagyon könnyű ábrázolni és az ábrázolt diagramokon nagyon könnyen leolvasható az optimális megoldás is. Ezek az esetek azonban a kis változószám miatt viszonylag egyszerűek, előbb-utóbb felmerül az igény a bonyolultabb, több változót tartalmazó esetek kezelésére is. Ennek a folyamatnak egy következő lépése a háromváltozós (3D optimum) eset, amelynek ábrázolása

már kissé bonyolultabb, térbeli diagramok létrehozását igényli. Ha tovább akarjuk a változók számát növelni (pl. 4 vagy több változós optimum), akkor már nem lesz lehetőség az ábrázolásra, vagy nagyon nehézkesé válik, és az analitikus út felértékelődik. Az így definiált optimumkeresési feladatokat külön erre a célra kifejlesztett, többváltozós optimumkereső algoritmusokkal célszerű megoldani, mint pl. az e cikk szerzője által kifejlesztett RVA [1] (Random Virus Algorithm), mely alkalmas nagyobb feladatok, sok változós esetek, multidiszciplináris optimalítási feladatok kezelésére is.

Az I-szelvényű tartók optimális méretezésére kiterjedt szakirodalom áll rendelkezésre. Több, jól kidolgozott számpéldát találunk Farkas könyveiben [2] és cikkeiben [3], többféle terhelési esetre is statikus és dinamikus [4] feladatokra is. A nemzetközi szakirodalomban is sok munka foglalkozik az ilyen tartók optimalizációjával [5]. Az optimalítási feladat megfogalmazásakor nemcsak saját tömeg lehet célfüggvény, hanem költség- minimum is kereshető [6].

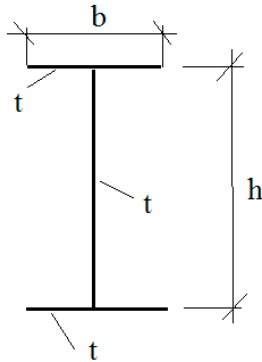
Jelen cikkben hajlításra és húzásra-nyomásra terhelt, hegesztett I-szelvényű tartók tömeg-minimumra történő optimalálására mutatok be példát, háromváltozós optimumkeresési problémaként. A feladatot a Kuhn-Tucker féle optimalitási kritériumra [7] alapuló, úgynevezett grafo-analitikus optimum keresési módszerrel oldom meg, melynek során háromdimenziós ábrázolással mutatom be a tervezési feltételeket kielégítő pontok által leírt tartományt (megfelelőségi tartomány), és a célfüggvény szintfelületeit (a célfüggvény konstans értékeihez tartozó felületek).

A feltételek és a célfüggvény szintfelületeinek helyzetét vizsgálva láthatóvá válnak a kétváltozós eset optimális megoldásai (pl. rögzített b változó esetére).

\* PhD, egyetemi docens, Miskolci Egyetem Gép- és Terméktervezési Intézet

## 2. I- TARTÓK OPTIMÁLIS TERVEZÉSE MINIMÁLIS SAJÁT TÖMEGRE

Az 1. ábra egy I tartó keresztmetszetét ábrázolja.



1. ábra. Egy I tartó keresztmetszete, az öv és a gerinc vastagsága egyenlőnek véve

A tartó terhelése hajlítás és húzás/nyomás, a tervezési változók a gerincmagasság ( $h$ ), övszélesség ( $b$ ) és a lemezvastagság ( $t$ ), az öv és a gerinclemez vastagsága közt közelítőleg a  $t_f = t_w = t$  össze-függést feltételezve. ( $t_w$  a gerinc,  $t_f$  az öv vastagsága).

A célfüggvény a tartó keresztmetszet- területe:

$$F_{obj} = 2bt + ht = A \quad (1)$$

Explicit feltételek [cm]:

$$\begin{aligned} 20 \leq h \leq 100, \quad 10 \leq b \leq 100 \\ 0.2 \leq t \leq 20 \end{aligned} \quad (2)$$

Implicit feltételek: Feszültségi feltétel, gerinc-lemez horpadási feltétel, övlemez horpadási feltétel. Feszültségi feltétel, hogy a hajlításból és a nyomásból származó feszültségek együttesen ne haladják meg a megengedett értéket:

$$\sigma_{hajl} + \sigma_n = \frac{M_{hajl}}{W_x} + \frac{N}{A} \leq \sigma_{meg} \quad (3)$$

A (3) egyenletben az  $N$  a nyomóerő,  $M_{hajl}$  a hajlítónyomaték.

$$W_x = h(2bt + ht/6), \quad \sigma_{meg} = 200 \text{ MPa} \quad (4)$$

Gerinclemez horpadási feltétel:

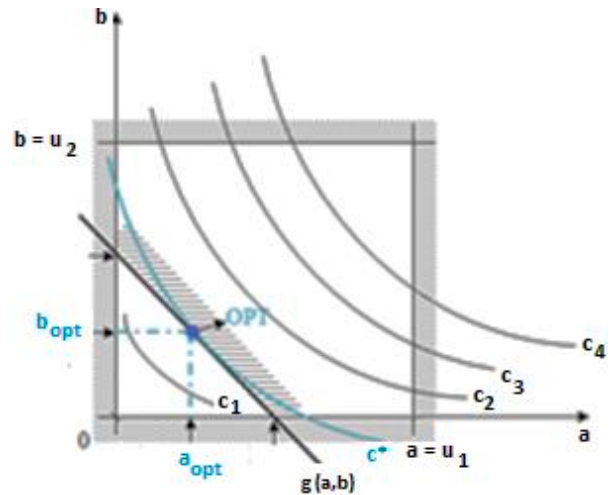
$$\frac{h}{t} \leq 145 \sqrt[4]{\frac{(1 + \sigma_n / \sigma_{hajl})^2}{1 + 173 (\sigma_n / \sigma_{hajl})^2}} \quad (5)$$

Övhorpadási feltétel:  $t \geq b / 30$

Az övlemez területe legyen a következő határok között:

$$14 \leq b t \leq 22.$$

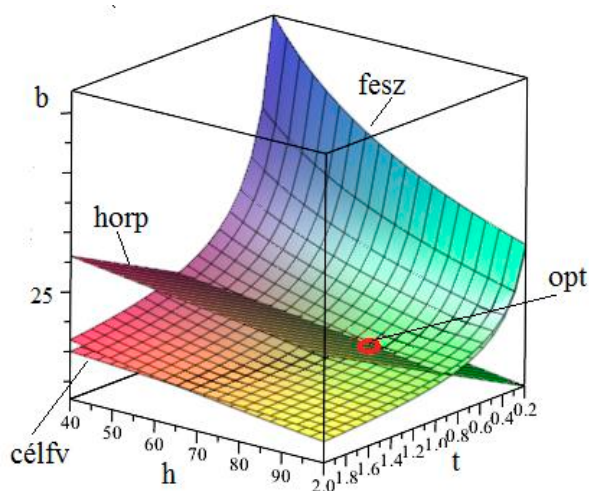
Az optimumkeresési feladatot a Kuhn- Tucker optimalitási kritériumra alapuló grafo- analitikus módszerrel oldom meg. Az optimalitási kritérium kimondja, hogy az optimális megoldás helyén a célfüggvény szintvonala érinti a megfelelőségi tartományt. A 2.ábrán a két tervezési változó a és b,  $g(a,b)$  az implicit feltétel, amely szűkíti az a és b változóra előírt explicit feltételek által kijelölt megfelelőségi tartományt. A célfüggvény szintvonalait úgy nyerjük, hogy találgatásszerűen konstanssal ( $c_1, c_2, \dots, c_n$ ) tesszük egyenlővé a célfüggvényt, úgy, hogy fokozatosan közelítünk a megfelelőségi tartomány felé, amíg meg nem valósul az érintés. A  $c$  konstans érintkezéskor felvett értéke ( $c^*$ ) a célfüggvény elérhető legjobb értéke.



2. ábra A célfüggvény szintvonala az optimum helyén érinti a megfelelőségi tartományt

A jelen cikkben vizsgált eset nem kétváltozós, hanem három tervezési változót tartalmaz:  $h, t, b$ , ezért a megfelelőségi tartomány és a célfüggvény szintvonalának ábrázolása nem görbék, hanem háromdimenziós felületeket fog tartalmazni, ezeket kell ábrázolni. A háromdimenziós felületek két dimenzióban (a papír síkján) történő ábrázolása kissé nehézkes, de ezeknél is igaz az, hogy az optimális megoldásnál a célfüggvény szintfelülete érinti a megfelelőségi tartományt (ami most már térfogat, nem felület, mint a kétváltozós esetekben volt). Ha sikerül a háromdimenziós ábrázolás, akkor jutalomként azt fogjuk tapasztalni, hogy láthatóvá válik számunkra az összes kétdimenziós optimum is (azaz amikor a három változóból egy változó rögzített).

A probléma háromdimenziós ábrázolását mutatja a 3. ábra. Az ábrán látszik a feszültségi feltétel felülete, mely metszésbe kerül a gerinclemez horpadási feltétellel (az övlemez horpadási feltétel teljesül, ha a gerinclemez horpadási feltétel teljesül), valamint a célfüggvény szintvonalai és ennek áthatása a feszültségi feltétellel. Az összes feltétel egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy a feltétel határfelületétől felfelé van a megfelelőségi tartomány, a felület alá nem mehetünk. A célfüggvényből viszont a lehető legkisebbet keressük, tehát az optimum ott van, ahol a feszültségi feltétel és horpadási feltétel felületeinek metszéspontját érinti a célfüggvény szintvonalai. Az optimum helyét piros körrel jelöltük. A feszültségi feltétel és a horpadási feltétel áthatása egy térgörbe, amely mutatja rögzített  $b$  változó esetén az arra az esetre érvényes kétváltozós ( $h$ ,  $t$ ) optimumokat. Háromdimenziós feladatoknál az optimumot a célfüggvény szintvonalai metszi ki a görbéből, jelen esetben is így adódott az optimális megoldás.



3. ábra A feltételek és a célfüggvény szintfelülete, háromdimenziós ábrázolással

A 3. ábrából tehát leolvasható az optimális megoldás, azaz a három változó értéke, melynél a célfüggvény, azaz a tartó tömege minimális.

Az itt bemutatott példában a hajlítónyomatéki terhelés  $M = 320$  kNm, a nyomóerő  $N = 128$  kN, a megengedhető feszültség 200 MPa volt. Az 1. táblázat mutatja erre az esetre az optimális megoldás számértékeit (a méretek cm-ben).

Az 1. táblázatban az optimális eredményeket összehasonlíthatjuk a Backtrack [2] módszerrel nyerhető eredményekkel is, az összehasonlítás alapján elmondható, hogy a grafo-analitikus módszer is hatékonyan alkalmazható az ilyen jellegű feladatok megoldásához.

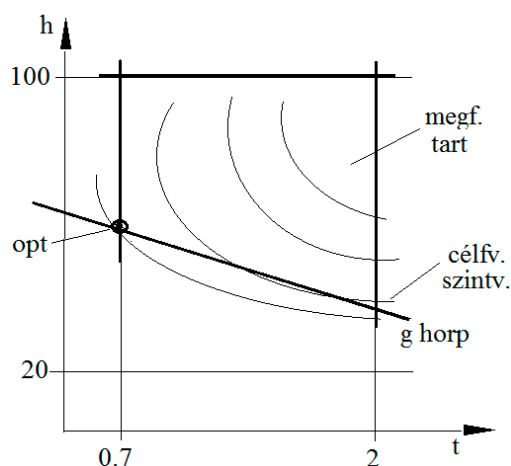
1. táblázat A három változós optimálási feladat numerikus megoldása

Paraméter	Grafo-an	Backtr.
$h$	69	70
$t_w$	0.7	0.6
$b$	21	22.5
$t_f$	0.7	0.8
$A$	77.7	78

### 3. A KÉTVALTOZÓS FELADAT MEGOLDÁSA

A kétváltozós feladat esetén a  $b$  értéke kötöttnek tekintendő, csak a  $h$  és  $t$  változhat. Legyen a  $b$  változó megkötött értéke a háromváltozós feladatnál kiadott optimális  $b$  érték, azaz 21 cm. Ekkor az övhorpadási feltételből az adódik, hogy a  $t$  változó nem lehet kisebb, mint  $b / 30 = 0.7$  cm.

A  $h$  változó explicit feltétele a  $t$  változó feltételeivel és a gerinchorpadási feltétellel kijelöli a megfelelőségi tartományt. A célfüggvény szintvonalai a lehető legkisebb olyan értéket keressük, amivel még kielégíthetők a tervezési feltételek, így a 4. ábrán bejelölt pontban lesz az optimum.



4. ábra A feltételek és a célfüggvény szintvonalainak ábrázolása

A kétváltozós optimum eredményeit a 2. táblázat tartalmazza.

A  $h$  változó értéke a kétváltozós feladat esetén megegyezik a háromváltozós optimális értékkel, ami azt támasztja alá, hogy a kétváltozós optimum görbéjének része a háromváltozós eredmény, azaz ténylegesen láthatók lennének a különböző lekötött  $b$  értékek esetén a kétváltozós optimumok a háromváltozós optimális során, és a kétváltozós optimumok térgörbéjének egy pontja a háromváltozós optimumkeresési probléma megoldása.

2. táblázat A kétváltozós optimalizációs feladat numerikus megoldása

Paraméter	Grafo-an
h	69
$t_w$	0.7
b	21
$t_f$	0.7
A	77.7

#### 4. KÖVETKEZTETÉS

Jelen cikk a Kuhn-Tucker optimalitási kritériumra épülő grafoanalitikus megoldással egy hajlítónyomott/húzott I- tartó háromváltozós optimalizálását mutatja be. A grafikus módszer során az explicit és implicit tervezési feltételeket háromdimenzióan ábrázoltam, a célfüggvény szintfelületét pedig addig változtattuk, amíg a szintfelület és a megfelelőségi tartomány érintésbe nem került. Az érintéskor kialakuló érintési pont az optimumkeresési feladat megoldása, azaz a legkisebb tömegű olyan tartó, amely az adott terheléseket biztonságosan elviseli.

A módszert egy számpéldára alkalmazva, táblázatosan megadtam az optimális méreteket és a célfüggvény elérhető legjobb értékét. A feladat megoldása során érdekes mellékeredményként az tapasztalható, hogy a háromdimenziós ábrázolásban egy térgörbe formájában láthatóvá válik az összes olyan kétváltozós megoldás, amelyek a b változó kötött értékeihez tartoznának. A háromváltozós megoldás tulajdonképpen ennek a görbének egy pontja, hiszen az optimális megoldás megmutatja a b változó optimális értékét is.

Az optimumkeresés végeredményét összehasonlítva más módszerrel (Backtrack) nyert eredményekkel, elmondható, hogy a grafo-analitikus módszer hatékonyan bizonyult.

Elvégezve a kétváltozós optimalizációt is, az adódó eredmények alátámasztják, hogy a háromváltozós optimum rajta van a kétváltozós optimális eredmények által alkotott térgörbén.

#### 5. IRODALOM

- [1] SZABÓ F. J. : Multidisciplinary optimization of journal bearings, using an RVA evolutionary type optimization algorithm. *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 13, No 7., pp 181-195, 15 p. 2016 , ISSN 17858860.  
[http://acta.uni-obuda.hu/Szabo\\_71.pdf](http://acta.uni-obuda.hu/Szabo_71.pdf)  
DOI: 10.12700/APH.13.7.2016.7.10
- [2] FARKAS J.: *Fémszerkezetek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983. ISBN 963 17 6537 7 .  
(a Backtrack módszer a 46.- 50. oldalon található).
- [3] FARKAS J.: Minimisation of cross section area of welded unstiffened plate and box girders subjected to bending and shear. *Acta Technica Hungarica*, 87 (1978) pp. 295-306.
- [4] CASSIS J. H.: *Optimum design of structures subjected to dynamic loads*. Ph. D. Thesis, University of California, Los Angeles, 1974.
- [5] AKITA Y., KITAMURA K. : Studies on nonlinear programming optimization for ship structures and optimum design of box and I-section girders. *Japan Shipbuilding and Marine Engineering*, 6 (1972), No. 5. pp. 15-27.
- [6] ANNAMALAI N.: *Cost optimization of welded plate girders*. Ph. D. Thesis, Purdue University, Indianapolis, USA. 1972.
- [7] KUHN H. W., TUCKER A. W.: Nonlinear programming. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. Berkeley, University of California Press. pp.481-492. MR 0047303. (1951).